Epidemiemodell Franz Daxinger

Im Rahmen meiner Bachelorarbeit habe ich ein mathematisches Epidemiemodell erstellt und mit Hilfe von Daten optimiert. Das führte dazu, dass die Modellvoraussagen so genau wie möglich wurden, obwohl die grundlegenden Parameter und Messfehler der Daten nicht bekannt waren. Ich möchte euch in diesem Artikel die Möglichkeiten und Probleme der mathematischen Epidemiemodellierung näherbringen, die ich im letzten Jahr untersucht habe:

Das Jahr 2020 hat gezeigt, dass die mathematische Modellierung von Epidemien äusserst wichtig sein kann. Mit einem perfekten mathematischen Modell wäre es nämlich möglich, den zukünftigen Verlauf der COVID-19 Epidemie vorauszusagen und darauf zu reagieren. Das hört sich in der Theorie vielversprechend an, ist aber bei so komplexen Vorgängen unmöglich umzusetzen. Zum einen fehlt schlicht die Genauigkeit der nötigen Daten (wer ist wirklich infiziert oder wie lange dauert es im Einzelfall, bis die Krankheit ausbricht?), zum anderen würde ein solches detailliertes Modell selbst auf den schnellsten Supercomputern Ewigkeiten an Rechenzeit benötigen. Einen Kompromiss zwischen Komplexität und Nützlichkeit stellen sogenannte SEI Modelle dar. Sie werden in der Epidemiologie eingesetzt, um die Dynamik einer Krankheit zu beschreiben. SEI steht für Susceptible, Exposed and Infected (Anfällig, Ausgesetzt und Infiziert). Das Modell teilt die Bevölkerung in drei Gruppen ein. Die S-Gruppe hatte noch keinen Kontakt mit der Krankheit und besitzt darum noch keine Immunität. Die E-Gruppe wurde schon angesteckt, gibt aber die Krankheit noch nicht weiter, weil diese erst nach einigen Tagen ausbricht. Mit der E-Gruppe wird die sogenannte Inkubationszeit (Zeit zwischen Ansteckung und Ausbruch) einer Krankheit modelliert. Die dritte Gruppe sind die infizierten Personen. Sie wurden angesteckt und können die Krankheit an die S-Gruppe übertragen. Diese Gruppen können mithilfe der Mathematik als Gleichungen dargestellt werden.

Partielle Differentialgleichungen sind Gleichungen, die eine Funktion als Lösung haben, die von mehreren Variablen abhängt. In unserem Fall suchen wir die Lösungen $S(x, y, t), E(x, y, t), I(x, y, t)$, die vom Ort (x, y) und vom Zeitpunkt (t) abhängig sind, und uns sagen wie viele Personen susceptible, exposed und infected sind. Mathematisch lässt sich das folgendermassen formulieren:

Zeitliche Veränderung in S (susceptible)

Zeitliche Veränderung in E (exposed)

Infizierte stecken Anfällige an (β ist Ansteckungskoeffizient)

Pendler aus benachbarten Gemeinden tragen zur Übertragung bei

Reisende aus anderen Kantonen werden auch berücksichtigt

$$\boxed{\frac{\partial S(x,y,t)}{\partial t}} = \boxed{-\beta S(x,y,t)\, I(x,y,t)} + \boxed{\frac{\theta}{\rho(x,y)} \nabla \left(\frac{M_{ij}|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}{A_{ij}} \nabla S(x,y,t) \right)} + \boxed{f_S(x,y,t)}$$

$$\boxed{\frac{\partial E(x,y,t)}{\partial t}} = \boxed{\beta S(x,y,t)\, I(x,y,t)} - \boxed{\frac{E(x,y,t)}{Z}} + \boxed{\frac{\theta}{\rho(x,y)} \nabla \left(\frac{M_{ij}|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}{A_{ij}} \nabla E(x,y,t) \right)} + \boxed{f_E(x,y,t)}$$

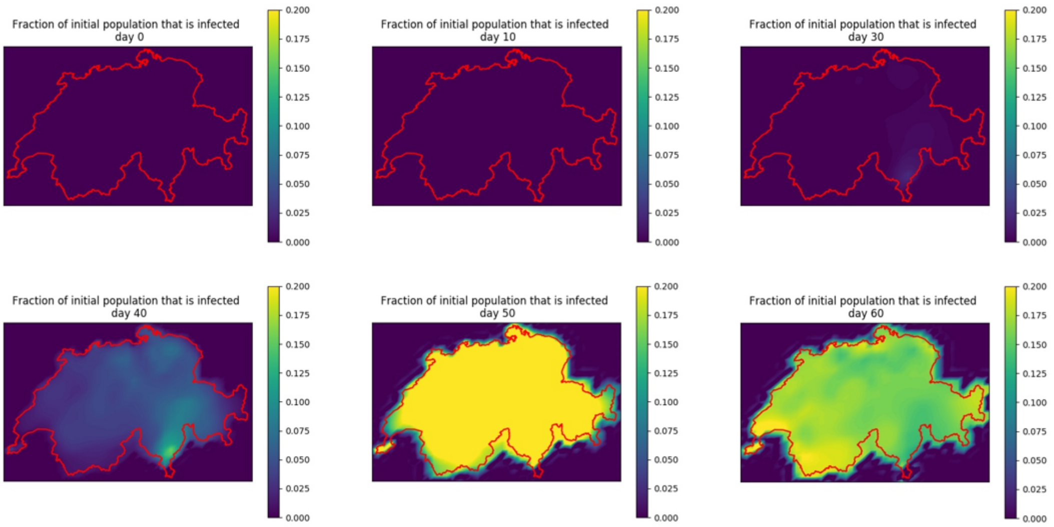
$$\boxed{\frac{\partial I(x,y,t)}{\partial t}} = \boxed{\frac{E(x,y,t)}{Z}} - \boxed{\frac{I(x,y,t)}{D}} + \boxed{\frac{\theta}{\rho(x,y)} \nabla \left(\frac{M_{ij}|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|}{A_{ij}} \nabla I(x,y,t) \right)} + \boxed{f_I(x,y,t)}$$

Zeitliche Veränderung in I (infected)

Inkubationszeit Z verzögert Epidemie

D ist durchschnittliche Dauer der Infektion

Mithilfe eines Computers können diese Gleichungen nun für das Gebiet der Schweiz gelöst werden, was uns eine berechnete Vorhersage des Epidemiegeschehens gibt.



Obwohl dieses Modell viele Vorgänge berücksichtigt, hat es einige Schwächen: Um eine Lösung zu erhalten, muss der Anwender am Anfang Werte für die Parameter und Anfangsbedingungen wählen, die er ja eigentlich nicht genau kennt (wie gross sind die Infektionsrate, Inkubationszeit, etc. und wo befinden sich die ersten infizierten Personen am Tag 0 der Epidemie). Mit geeigneten Annahmen kann das Modell Lösungen produzieren, in denen die gesamte Schweiz in wenigen Tagen infiziert wird oder die Krankheit sogar von selbst ausstirbt. Beides ist mathematisch möglich, entspricht jedoch keineswegs unseren Beobachtungen der Wirklichkeit.

Es gibt allerdings eine statistische Methode, um die Parameter optimal zu wählen, wenn man Referenzdaten hat. Mithilfe der Bayesischen Statistik wird das Modell tausende Male mit leicht verschiedenen Parametern und Messfehlern simuliert, mit den Daten verglichen und angepasst. Das Endresultat ist dann ein mathematisches Modell, dass das Epidemiegeschehen der vergangenen Tage optimal abbildet und auch in Zukunft realistische Ergebnisse produziert, solange sich die zugrunde liegenden Parameter nicht ändern. Dies passiert in der Praxis jedoch relativ schnell, weswegen die Resultate schon nach wenigen Tagen angepasst werden müssen. Trotzdem kann mit dieser Methode das Epidemiemodell optimal eingestellt werden, damit es zumindest für kurze Zeit brauchbare Resultate produziert, die als Kompass für Entscheidungsträger benutzt werden können.

Bei Fragen oder für eine mathematischere Erklärung könnt ihr euch gerne an mich (FRD) wenden.